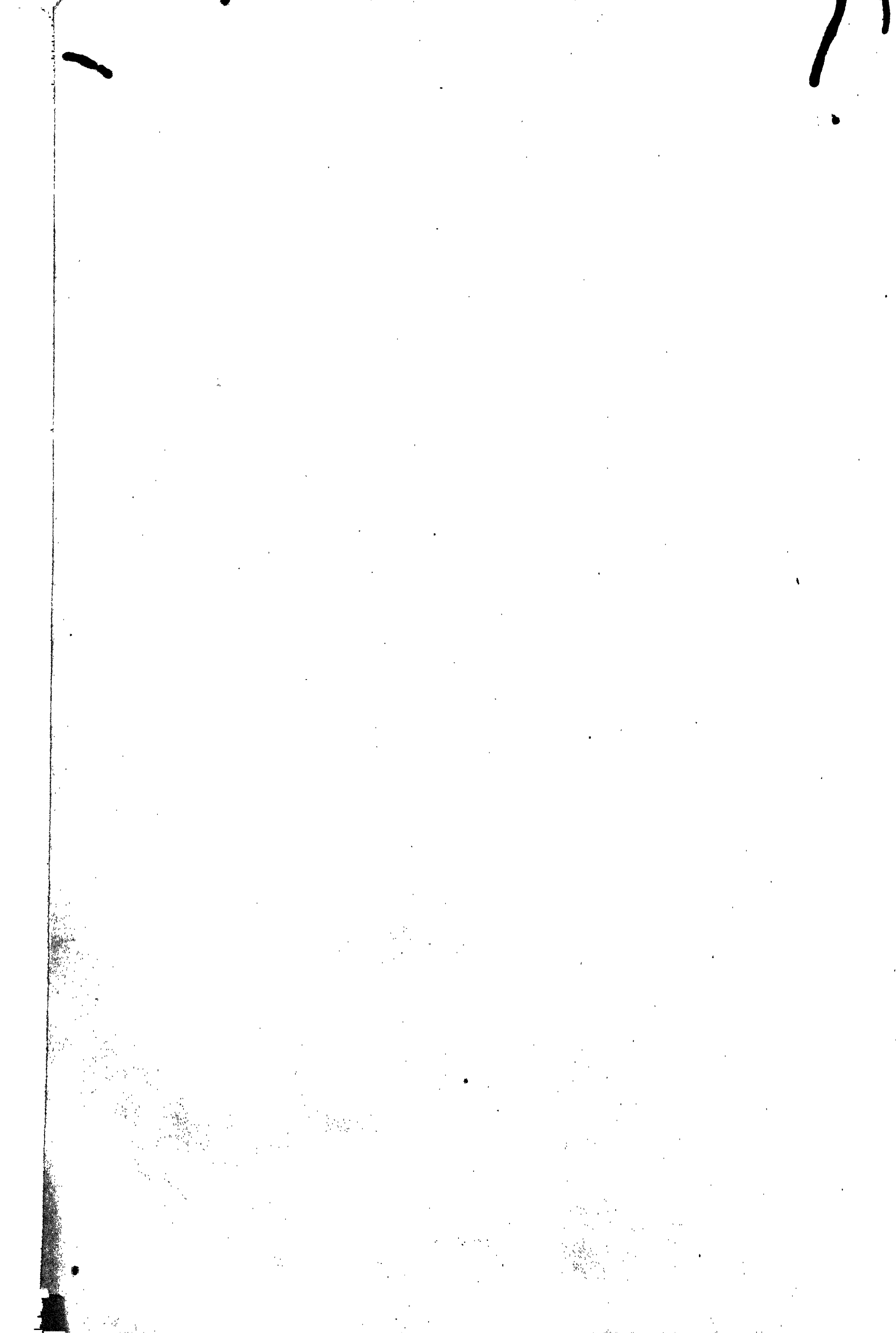


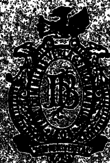
Lehrbuch der Potentialtheorie.

Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume.

Von

Dr. Arthur Korn,
Privatdozent an der K. Universität München.

Mit 94 in den Text gedruckten Figuren.



Berlin 1899.
Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

Vorwort.

Die Theorie des Potentials verdankt ihre Entstehung dem wesentlichen Nutzen, welchen die Einführung dieses rein geometrischen Begriffes in allen den Problemen der Physik gewährt, bei welchen es sich um Bewegungen von Massen handelt, die auf einander dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehungs- oder Abstofsungskräfte auszuüben scheinen. Denken wir uns bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz, wie es durch das Newtonsche Gravitationsgesetz in die Mechanik des Himmels, durch das Coulombsche Gesetz in die Theorie der elektrischen Erscheinungen eingeführt wird, ein Massenteilchen m an der Stelle (xyz) von beliebig vielen Massenteilchen m_j an den Stellen $(x_j y_j z_j)$ beeinflusst, so sind die Komponenten der Gesamtkraft, welche alle Teilchen m_j auf das Teilchen m auszuüben scheinen:

$$X = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{x - x_j}{r_j},$$

$$Y = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{y - y_j}{r_j},$$

$$Z = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{z - z_j}{r_j},$$

wo die ε_j Konstanten vorstellen, r_j die Entfernung:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j^2)}$$

und Richtung:

$$(x_j y_j z_j) \longrightarrow (x y z)$$

Vorwort.

Die Theorie des Potentials verdankt ihre Entstehung dem wesentlichen Nutzen, welchen die Einführung dieses rein geometrischen Begriffes in allen den Problemen der Physik gewährt, bei welchen es sich um Bewegungen von Massen handelt, die auf einander dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehungs- oder Abstoſsungskräfte auszuüben scheinen. Denken wir uns bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz, wie es durch das Newtonsche Gravitationsgesetz in die Mechanik des Himmels, durch das Coulombsche Gesetz in die Theorie der elektrischen Erscheinungen eingeführt wird, ein Massenteilchen m an der Stelle (xyz) von beliebig vielen Massenteilchen, m_j an den Stellen $(x_j\, y_j\, z_j)$ beeinflusst, so sind die Komponenten der Gesamtkraft, welche alle Teilchen m_j auf das Teilchen m auszuüben scheinen:

$$X = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{x - x_j}{r_j},$$

$$Y = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{y - y_j}{r_j},$$

$$Z = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{z - z_j}{r_j},$$

wo die ε_j Konstanten vorstellen, r_j die Entfernung:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j^2)}$$

und Richtung:

$$(x_j\, y_j\, z_j) \longrightarrow (x\, y\, z)$$

repräsentiert, deren Richtungskosinusse ja durch die Quotienten:

$$\frac{x - x_j}{r_j}, \quad \frac{y - y_j}{r_j}, \quad \frac{z - z_j}{r_j}$$

gegeben sind.

Da sich nun X, Y, Z in der Form darstellen lassen:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

wenn man:

$$V = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j}$$

setzt, so sieht man, dass zur Bestimmung der Kräfte X, Y, Z lediglich die Kenntnis einer einzigen Funktion V erforderlich ist, die man als das Potential der von dem Massensystem m_j auf m ausgeübten Kraftwirkung bezeichnet.

Mit den Eigenschaften dieser Funktion V, als deren wichtigste die Erfüllung der partiellen (Laplaceschen) Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

anzusehen ist, hat sich die Theorie des Potentials im eigentlichen Sinne zu beschäftigen.

Die hier besonders hervorgehobene Eigenschaft jedes Potentials, eine partikuläre Lösung der Laplaceschen Gleichung zu sein, hat allmählich das Interesse des Mathematikers der Integration dieser Gleichung zugewandt, und man könnte wohl die Potentialtheorie in ihrer gegenwärtigen Ausdehnung geradezu als die Lehre von der Integration der Laplaceschen Gleichung definieren.

Diese Wandlung hat sich nicht bloſs in der reinen Analyse vollzogen, eine groſse Umwälzung in den Ideen über die Wechelwirkungen, denen der Begriff des Potentials seine Entstehung verdankte, ist mit derselben Hand in Hand gegangen; man ist von der

Voraussetzung der Fernewirkung zu der Annahme fortgeschritten, dass nur ein Zwischenmedium durch stetige Fortpflanzung eines Bewegungszustandes von einem Teilchen zum anderen die Wechselwirkung zweier räumlich getrennter Teilchen vermitteln kann, der früher leer geglaubte Raum außerhalb derselben hat sich belebt, und sein Bewegungszustand wird an jeder Stelle durch den Wert einer Funktion V (einer sogenannten Potentialfunktion) bestimmt, welche in ganzer Erstreckung des genannten Raumes der Laplaceschen Gleichung genügt, und der man ebenso, wie ihren ersten Ableitungen, die Eigenschaft der Stetigkeit beilegte.

Die wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik laufen nunmehr auf das mathematische Problem hinaus: Potentialfunktionen eines gegebenen Raumgebietes zu finden, welche an der Oberfläche desselben vorgeschriebene Grenzbedingungen erfüllen, und unter ihnen sind die beiden wichtigsten:

1. Das elektrostatische Problem: Potentialfunktionen gegebener Raumgebiete zu finden, wenn ihre Randwerte vorgeschrieben sind.

2. Das hydrodynamische Problem: Potentialfunktionen gegebener Raumgebiete zu finden, wenn ihre normalen Ableitungen an der Grenze vorgeschrieben sind.

In dem vorliegenden Lehrbuch der Potentialtheorie habe ich zwei wesentlich verschiedene Gesichtspunkte zu vereinigen gesucht; dasselbe soll einmal zur Einführung in die Potentialtheorie dienen (Teil I bis III) und setzt nur die Vorkenntnisse voraus, welche nach den gewöhnlichen Anfangsvorlesungen über Differential- und Integralrechnung, sowie die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes erwartet werden dürfen; es soll aber andererseits auch (Teil IV und V) den Leser, nachdem er sich mit den Grundlagen der Theorie vertraut gemacht hat, bis zu den gegenwärtigen Grenzen dieses für die theoretische Physik wichtigsten Gebietes der Mathematik hinführen. Um das Buch beiden Zwecken dienstbar zu machen, habe ich einige Untersuchungen in Teil I bis III, welche für die erste Einführung in die Theorie nicht von nöten sind, in kleinem Druck beigefügt oder in besonderen Anmerkungen am Schlusse des Buches gegeben; für das Studium von Teil IV

und V sind aber auch diese kleingedruckten Stellen und Anmerkungen eine unumgängliche Voraussetzung.*)

Nachdem im I. bis III. Teile die allgemeinen Eigenschaften der Potentiale, die Theorie der Kugelfunktionen und die Grundlagen der Theorie der Potentialfunktionen auseinandergesetzt sind, beschäftigen wir uns in Teil IV und V mit der Integration der Laplaceschen Gleichung, mit den bisher allgemeinsten Lösungen des elektrostatischen und hydrodynamischen Problemes; diese Untersuchungen bauen sich im wesentlichen auf die folgenden hervorragenden Arbeiten**) auf:

C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels (Abhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1887). (Die Grundzüge dieser Methode zuerst veröffentlicht 21. 4. und 31. 10. 1870 Ber. der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften).

H. Poincaré, la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (acta mathematica 1895).

H. A. Schwarz, Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren (Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 30. 5. 1870).

M. A. Liapounoff, sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (journal de mathématiques 1898).

Durch die Methode von Neumann gelang es zum erstenmale, Funktionen zu konstruieren, welche im Aufsenraume oder Innenraume irgend einer geschlossenen Fläche ω stetig sind, der Laplaceschen Gleichung genügen, an der Fläche ω vorgeschriebene Werte f annehmen, und deren sämtliche Ableitungen in irgend welchen Entfernungen von ω stetig sind, falls nur die Fläche ω überall konvex ist (d. h. von irgend einer Geraden im Raume in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann),***) und falls die vorgeschriebenen Randwerte f auf ω stetig sind.

Poincaré hat diese Methode für eine beliebige geschlossene, stetig gekrümmte, einfach zusammenhängende Fläche ω und für Randwerte f bewiesen, die mit allen Ableitungen auf ω stetig sind, aber unter den beiden folgenden wesentlichen Restriktionen:

1. Es muss die Existenz der gesuchten Funktion bereits auf irgend eine andere Weise gesichert sein;

2. Es müssen Transformationen existieren, welche den Innenraum der Fläche ω in den Innenraum einer Kugel, den Aufsenraum von ω in den Aufsenraum dieser Kugel verwandeln, Transformationen, die gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen und vor allem jedem Elemente $d\omega$ von ω

---

*) Die wenigen in Teil IV und V kleingedruckten Stellen mögen zweckmäfsig auch bei dem Studium dieser Teile zuerst übersprungen und erst nachträglich berücksichtigt werden.

**) Ein ausführlicheres Litteraturverzeichnis findet sich am Ende des Buches.

***) Den gleichfalls ausgeschlossenen, singulären Fall der sogenannten Zweisternigkeit wollen wir nicht besonders bemerken.